УДК 519.6: 531.19 EDN TDERNS

Анализ устойчивости по Якоби динамической системы Лоренца

© П.М. Шкапов[1], В.Д. Сулимов[1], А.В. Сулимов[1,2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация
[2]Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Севастополе, Севастополь, 299000, Российская Федерация

Рассмотрены задачи анализа устойчивости по Якоби, а также восстановления свободных параметров динамической системы Лоренца по косвенной, приближенно заданной информации. В контексте теории Косамби — Картана — Черна введено геометрическое описание эволюции системы во времени и определены пять геометрических инвариантов. Собственные значения второго инварианта (тензора кривизны отклонения) дают оценку устойчивости системы по Якоби. Подобное исследование представляет интерес в приложениях, где требуется установить области, в которых имеют место одновременно устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби. Сформулирована обратная задача восстановления параметров системы по заданным приближенно собственным значениям второго инварианта. Решение регуляризованной обратной задачи определено с использованием оптимизационного подхода. Скалярные критериальные функции предполагаются непрерывными, многомерными, многоэкстремальными, локально липшицевыми, не обязательно всюду дифференцируемыми. При поиске глобальных решений применен новый гибридный алгоритм, интегрирующий стохастический алгоритм сканирования пространства переменных и детерминированный метод локальной минимизации. В фазе локального поиска введены двухпараметрические сглаживающие аппроксимации критериальных функций. Приведен численный пример восстановления параметров системы Лоренца.

Ключевые слова: *устойчивость по Якоби, теория Косамби – Картана – Черна, геометрический инвариант, система Лоренца, восстановление параметров, глобальная оптимизация, гибридный алгоритм*

Введение. Исследования устойчивости динамических систем в общем случае могут включать в себя применение теории Косамби — Картана — Черна (теории ККЧ) [1, 2]. При этом реализуется дифференциально-геометрический подход к вариационным дифференциальным уравнениям, описывающим отклонение целой траектории системы от ближайших траекторий. При геометрическом описании, вводимом теорией ККЧ, могут быть определены пять геометрических инвариантов системы. Второй инвариант (называемый тензором кривизны отклонения) дает оценку устойчивости системы по Якоби: соответствующий критерий устойчивости формулируется с использованием собственных значений указанного инварианта. Анализ устойчивости по Якоби связан с изучением робастности динамической системы как меры нечувствительности и адаптации к изменению параметров как собственно системы, так и окружающей среды [3]. Применение теории ККЧ актуально в практических приложениях, где требуется определить области, в которых имеют место одновременно устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби.

Пусть для нелинейной динамической системы с заданной структурой определен тензор кривизны отклонения. Предполагается, что собственные значения указанного тензора не только дают оценку устойчивости системы по Якоби (в соответствии с теорией ККЧ), но также несут и содержательную информацию о самой системе. Некоторые обратные задачи на собственные значения тензоров представлены в работе [4]. Далее рассматривается постановка задачи, в которой требуется определить существенные характеристики системы по заданным собственным значениям ее тензора кривизны отклонения. Необходимые входные данные задачи могут быть получены из эксперимента посредством прямых измерений с последующей компьютерной обработкой. Искомыми являются, например, физические и геометрические характеристики системы и окружающей среды, характеристики управления и др. Формулируется обратная задача восстановления существенных параметров исследуемой динамической системы по косвенной информации, представленной конечным множеством собственных значений тензора кривизны отклонения. Обратные задачи восстановления параметров систем относятся к классу некорректно поставленных задач, при решении которых требуется применение специальных регуляризирующих методов [5].

Одним из основных подходов к решению обратных задач является оптимизационный, связанный с минимизацией некоторой критериальной функции. В приложениях необходимо также учитывать неполноту входной косвенной информации, зашумленность измеряемых данных, возможное наличие кратных собственных значений и др. [6, 7]. Ввиду естественной ограниченности энергии изменений в системе вводится предположение о том, что отношения приращений критериальных функций к приращениям аргументов не превышают некоторого порога, характеризуемого константой Липшица [8]. В общем случае критериальные функции обратных задач являются непрерывными, многомерными, локально липшицевыми, многоэкстремальными, не обязательно всюду дифференцируемыми. Следовательно, для решения обратных задач восстановления параметров системы требуется применение алгоритмов глобальной недифференцируемой оптимизации [9]. В целом, рассматриваемый далее подход основан на разработке и применении математических моделей систем, методов определения геометрических структур и анализа устойчивости систем по Якоби на основе теории ККЧ, методов теории обратных задач, методов глобальной оптимизации.

Геометрические инварианты системы и ее устойчивость по Якоби. Краткий обзор теории ККЧ дан в работах [1, 2]. Уравнения движения n-мерной системы (нелинейные в общем случае) могут быть получены с использованием уравнений Эйлера — Лагранжа и представлены в виде [2]

$$\ddot{x}^i + 2G^i(x^j, \dot{x}^j, t) = 0, \ i = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

где локальная система координат $(x^i, \dot{x}^i, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, введена на открытом связном подмножестве Ω евклидова $(2n+1)$-мерного пространства $R^n \times R^n \times R^1$; $x^i = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $\dot{x}^i = dx^i / dt$, $\ddot{x}^i = d^2x^i / dt^2$ (t — время); каждая функция $G^i(x^i, \dot{x}^i, t)$ имеет класс гладкости C^∞ в окрестности некоторых начальных условий $((x)_0, (\dot{x})_0, t_0)$ на Ω. В рамках подхода могут быть определены пять геометрических инвариантов системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (1).

Для несингулярных преобразований координат ККЧ-ковариантная производная векторного поля $\xi = \xi^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ на подмножестве Ω определяется в виде [1]

$$\frac{D\xi^i}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + N^i_j \xi^j,$$

где локальные коэффициенты нелинейной связности определены как $N^i_j = \dfrac{\partial G^i}{\partial y^j}$, и тогда при $y^i = \xi^i$ получается первый ККЧ-инвариант ε^i:

$$N^i_j y^j - 2G^i = -\varepsilon^i.$$

Варьирование траекторий $x^i(t)$ уравнений (1) относительно ближайших траекторий приводит к уравнениям в ковариантной форме [1, 2]:

$$\frac{D^2\xi^i}{dt^2} = P^i_j \xi^j. \tag{2}$$

Здесь ξ^i — контравариантное векторное поле, определенное на Ω; P^i_j — тензор, определяемый в виде

$$P^i_j = \frac{\partial N^i_j}{\partial x^k}\dot{x}^k - 2G^k G^i_{jk} + N^i_k N^k_j - 2Z^i_j,$$

где G^i_{jk} — локальные коэффициенты связности Бервальда, $G^i_{jk} = \dfrac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}$.