

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Физико-математические науки

Математика

*Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление*

Китаев Д.Б., кандидат физико-математических наук, доцент Российской государственного гуманитарного университета

КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Изложены результаты по изучению простых особых дифференциальных уравнений, полученных А. Пуанкаре. Проведен сравнительный анализ классификации особых точек у А. Пуанкаре и у Н.Е. Жуковского. Изложены основные результаты по изучению сложных особых точек.

***Ключевые слова:** дифференциальные уравнения, классификация особых точек, корни характеристического уравнения.*

CLASSIFICATION OF THE FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION SINGULARITIES

The paper presents the results of study of simple singular differential equations derived by H. Poincare. The comparative analysis of classification of singularities by H. Poincare and N.Ye. Zhukovsky has been made. The paper contains basic results of study of composite singularities.

***Key words:** differential equations, classification of singularities, roots of characteristic equation.*

Одним из важнейших вопросов качественной теории дифференциальных уравнений является изучение их особых точек. Решение этого вопроса мы находим у Пуанкаре в его ме-муаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» (1881–1886 гг.). Однако исторически первая классификация особых точек появилась раньше – в 1876 году и связа-на она с решением Н.Г. Жуковским одного вопроса из области гидродинамики. В своей ма-гистерской диссертации «Кинематика жидкого тела», исследуя вопрос о линиях тока плоско-го течения жидкости в окрестности точек, составляющие скорости которой обращаются в нуль, он пришел к задаче о поведении интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy} (ad - bc \neq 0) \quad (1)$$

в окрестности начала координат. Жуковский писал по этому поводу следующее:

«Вообразив некоторое пространство, ограниченное замкнутой поверхностью, внутри ко-торого скорости течения u , v , w непрерывны, однозначны и конечны, увидим, что линии то-ков, напоминающие такое пространство, не могут пересекаться или соприкасаться, так как

для каждой точки косинусы углов касательной к линии тока имеют одно определенное зна-

чение. Этого нельзя сказать, когда скорости u , v , w обращаются в 0 ; ∞ ; $\frac{0}{0}$ или становятся многозначными. Будем называть критическими точки, в которых линии тока пересекаются, соприкасаются или имеют бесконечно большую кривизну и разберем свойства таких точек сначала для плоского течения. Относя начало координат в точку, для которой скорости плоского течения u , v , w обращаются в нуль, в бесконечность или становятся неопределенными,

отыскиваем предел дроби $\frac{v}{u}$ при $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$. Если этот предел имеет конечную вели-

чину $\phi\left(\frac{Y}{X}\right)$, то уравнение линии токов, бесконечно близких от начала координат, получают-

ся с помощью интегрирования уравнения $\frac{dy}{dx} = \phi\left(\frac{Y}{X}\right)$ ». [3, с. 179]. Далее он приводит классификацию особых точек уравнений, аналогичную той, которую впоследствии дал Пуанкаре, и исследует поведение интегральных кривых в их окрестности. Жуковский не дает специальные наименования каждому типу особых точек, которых у него насчитывается шесть; случай, который по терминологии Пуанкаре носит название узла, распадается у него на три, получивших в дальнейшем наименование простого, вырожденного и дикритического узлов. Исследование особых точек подчинено у него изучаемым вопросам гидродинамики и не получило самостоятельного развития. Поэтому оно долгое время оставалось незамеченным, вплоть до 1924 г., когда на него обратил внимание Д.М. Синцов [6].

Следующая по времени классификация особых точек изложена в упоминаемом выше мемуаре Пуанкаре, который исследовал поведение интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X} \quad (2)$$

в окрестности начала координат, где X и Y – полинома относительно x и y :

$$X = a_0 + a_1(x - \alpha) + b_1(y - \beta) + \dots \quad (3)$$

$$Y = b_0 + b_1(x - \alpha) + b_2(y - \beta) + \dots \quad (4)$$

Он классифицирует особые точки по характеру корней уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 \\ b_1 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

Уравнение имеет два действительных различных корня одного знака. В этом случае через точку проходит бесконечное множество интегральных кривых. Такая особая точка называется узлом.

Уравнение имеет два действительных корня противоположных знаков. В этом случае через точку проходят две и только две интегральные кривые. Такая особая точка называется седлом.

Уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня с нулевой действительной частью. Интегральные кривые в этом случае – спирали, имеющие точку (α, β) асимптотической точкой, вокруг которой они делают бесконечное количество оборотов. Такая точка называется фокусом.

Уравнение имеет две сопряженных, чисто мнимых корня. Интегральными кривыми в окрестности точки (α, β) , является семейство замкнутых кривых, окружающих эту точку. Такая точка называется центром.

Следует отметить, что Пуанкаре в своем мемуаре исследовал лишь простые особые точки, т.е. тот случай, когда $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Исследование сложных особых точек в этом мемуаре не приводилось. По этому поводу Пуанкаре писал следующее: «Различные особенности, которые могут представить такие особые точки, слишком многочисленны и разнообразны для того, чтобы мы стали их здесь подробно изучать [5, с. 31]». Изучение этого вопроса впервые было проведено И.О. Бендиксоном в 1901 г. в его мемуаре, опубликованном в «Acta mathematica» [2] в 1901 г. под тем же названием, что и мемуар Пуанкаре. В этой работе были получены существенные обобщения результатов Пуанкаре по качественному изучению интегральных кривых на плоскости.

Существенное место в ней занимает изучение сложных особых точек. Изучая топологическую структуру сложных особых точек в случае равенства нулю одного корня характеристического уравнения, Бендиксон пришел к выводу о существовании особых точек трех типов – седла, узла и седло-узла и дал критерии их различия. Наибольшую сложность, как отмечал автор мемуара, представляет изучение сложной особой точки в случае равенства нулю обоих корней характеристического уравнения. Впервые такая задача была решена в 1955 г. А.Ф. Андреевым, применившим для этой цели прямой геометрический метод исследования – метод Фроммера. При этом автор пришел к выводу о существовании семи типов сложных особых точек: 1) седла, 2) узла, 3) фокуса, 4) центра, 5) седло-узла, 6) вырожденной особой точки (имеющей 2 гиперболических сектора), 7) сложной особой с эллиптической областью (имеющей один эллиптический и один гиперболический сектор) и установил критерии их различия. Позднее, в 1959 году, к аналогичным результатам пришла К.А. Губарь, принимавшая в своих исследованиях метод Бендиксона. Особые точки этих типов были затем подвергнуты различными авторами во главе с Ф. Дюмортье исследованиям на предмет выявления их бифуркаций при малых изменениях параметров исходной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев А.Ф.* Исследование поведения интегральных кривых одной системы двух дифференциальных в окрестности особой точки. – Вестник ЛГУ, 1955.
2. *Бендиксон И.О.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. УМП, т. 9, 1941.
3. *Губарь Н.А.* Исследование методом Бендиксона топологической структуры расположения траекторий в окрестности особой точки одной динамической системы. – Изв. вузов. Радиофизика, Т. 2, № 6, 1959.
4. *Жуковский Н.Е.* Кинематика жидкого тела. Мат. сб., 1876, т. 8.
5. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л., 1944.
6. *Синцов Д.М.* Н.Е. Жуковский и классификация особых точек дифференциальных уравнения первого порядка. – Учен. зап. научн.-исслед. кафедр. Укр. Отд. мат., вып. 1, 1924.