УДК 517.977.1 EDN FNNPHS

Стабилизация четырехзвенного перевернутого маятника на основе преобразования к нормальной форме после продолжения

© А.В. Арцибасов, Д.А. Фетисов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

Управление механическими системами в условиях дефицита управляющих параметров является сложной задачей, для ее решения нет единых подходов. Один из возможных способов справиться с этой проблемой — преобразование динамической системы, описывающей движение механизма, к нормальной форме Исидори. Показано, как такое преобразование позволяет решить задачу стабилизации четырехзвенного перевернутого маятника. Предполагается, что в качестве управляющих воздействий рассматриваются крутящие моменты в шарнирах, соединяющих соседние звенья. На основе идеи, предложенной в работе К. Шевальро, Дж. Гриззла и К. Муга, показано, что задача стабилизации неустойчивого положения равновесия маятника может быть решена на основе преобразования к нормальной форме после предварительного продолжения двух из трех управлений в системе. В качестве подтверждения работоспособности предлагаемого подхода приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: *нормальная форма, стабилизация, минимально фазовая система, продолжение системы с управлением*

Введение. Управление механическими системами, в которых число степеней свободы совпадает с числом управляющих параметров, как правило, не является сложной задачей и в большинстве случаев может быть сведено к преобразованию системы в линейную управляемую систему [1] либо к декомпозиции системы на более простые подсистемы [2]. Если число управляющих параметров в механической системе меньше числа степеней свободы, то задача управления в большинстве случаев становится нетривиальной и требуется применять более изощренные приемы. Общих подходов к управлению механическими системами в таких случаях нет. В литературе известны приемы, применение которых помогает решить ту или иную задачу. К их числу относятся управление на основе использования свойства пассивности [3, 4], метод обхода интегратора [5, 6], управление на основе преобразования к нормальной форме Исидори [7], управление с применением методов декомпозиции [8].

К системам с дефицитом управляющих параметров относятся и многозвенные маятники, у которых в качестве управлений рассматриваются крутящие моменты в шарнирах, соединяющих соседние звенья. Задача управления такими многозвенными механизмами остается актуальной, так как широко применяется в робототехнике, в первую очередь, в задачах управления змееподобными [9, 10] и шагающими [11, 12] роботами.

При рассмотрении задачи управления четырехзвенным перевернутым маятником предполагалось, что управляющих параметров три и ими являются крутящие моменты в шарнирах. Проблема управления подобным четырехзвенным механизмом возникает, например, при моделировании фазы одноопорного движения в задаче управления перемещением семизвенного двуногого шагающего робота [13]. В этом случае четыре звена можно трактовать как стопу, голень, бедро опорной ноги и туловище. Для решения задачи стабилизации четырехзвенного перевернутого маятника используется подход, предложенный в работе [14], который основан на преобразовании динамической системы, описывающей движение маятника, к нормальной форме Исидори после предварительного продолжения двух из трех управлений в системе.

Предварительные сведения. При решении задачи стабилизации маятника будут использованы такие термины, как нормальная форма динамической системы, относительный порядок выхода и минимально фазовая система. Для того чтобы вспомнить эти понятия, стоит рассмотреть аффинную стационарную систему

$$\dot{x} = A(x) + \sum_{i=1}^{m} B_i(x) u_i, \quad y = h(x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{т}} \in R^n$ — состояние; $A(x) = (a_1(x), ..., a_n(x))^{\mathrm{т}}$; $B_i(x) = (b_{i1}(x), ..., b_{in}(x))^{\mathrm{т}}$; $a_j, b_{ij} \in C^{\infty}(R^n)$; $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$; $u = (u_1, ..., u_m)^{\mathrm{т}} \in R^m$ — управление; $y = (y_1, ..., y_m)^{\mathrm{т}} \in R^m$ — выход; $h(x) = (h_1(x), ..., h_m(x))^{\mathrm{т}}$; $h_i \in C^{\infty}(R^n)$, $i = \overline{1,m}$.

Пусть $x_0 \in R^n$ — положение равновесия системы (1), т. е. выполнено равенство $A(x_0) = 0$. Будем полагать, что в положении равновесия x_0 выход y обращается в нуль, т. е. имеет место равенство $h(x_0) = 0$. Требуется решить задачу стабилизации положения равновесия x_0 системы (1).

Системе (1) соответствует распределение $S = \mathrm{span}\{B_1, \ldots, B_m\}$, порожденное управляющими векторными полями $B_1, ..., B_m$. Распределение S называют инволютивным на открытом множестве $M \subset R^n$, если для любых двух векторных полей ξ_1, $\xi_2 \in S$ на множестве M выполнено условие $[\xi_1, \xi_2] \in S$, где $[\xi_1, \xi_2]$ — коммутатор векторных полей ξ_1 и ξ_2.

Известно [7], что относительный порядок выхода $y = h(x)$ в точке x_0 равен $(r_1, ..., r_m)$, если в окрестности точки x_0 выполнены равенства $B_j A^k h_i(x) = 0$, $i, j = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, r_i - 2}$, а матрица $G(x) = (B_j A^{r_i - 1} h_i(x))_{i, j = \overline{1,m}}$ невырождена в точке x_0. Данное определение имеет следующую трактовку. Относительный порядок выхода $y = h(x)$ в точке x_0 равен $(r_1, ..., r_m)$, если: а) при последовательном дифференцировании выхода y_i в силу системы (1) управления впервые появляются в производной порядка r_i, $i = \overline{1, m}$; б) матрица $G(x)$, составленная из коэффициентов при $u_1, ..., u_m$ в выражениях для $y_1^{(r_1)}, ..., y_m^{(r_m)}$, невырождена в точке x_0.

Согласно [7], если относительный порядок выхода $y = h(x)$ в точке x_0 равен $(r_1, ..., r_m)$, то имеет место неравенство $r_1 + ... + r_m \leqslant n$, а функции

$$z_1^i = h_i(x), z_2^i = Ah_i(x), \ldots, z_{r_i}^i = A^{r_i - 1} h_i(x), \quad i = \overline{1, m}$$

независимы в окрестности точки x_0.

Введем обозначение $r = r_1 + ... + r_m \leqslant n$. Из определения относительного порядка следует, что функции из набора

$$F = \{z_1^i = h_i(x), z_2^i = Ah_i(x), \ldots, z_{r_i - 1}^i = A^{r_i - 2} h_i(x), i = \overline{1, m}\}$$

являются первыми интегралами распределения S. В наборе F содержится $r - m$ функций. Дальнейшие рассуждения предполагают выполнение следующих двух условий: а) $\dim S(x) = m$ для всех точек x из некоторой окрестности точки x_0; б) распределение S инволютивно в окрестности точки x_0. Если эти условия выполняются, то в окрестности точки x_0 у распределения S существует $n - m$ независимых первых интегралов. Обозначим через $\eta_1(x), ..., \eta_{n-r}(x)$ первые интегралы распределения S, независимые от функций из F. Рассмотрим замену переменных Φ, задаваемую соотношениями

$$z_1^i = h_i(x), z_2^i = Ah_i(x), \ldots, z_{r_i}^i = A^{r_i - 1} h_i(x), i = \overline{1, m},$$

$$\eta_1 = \eta_1(x), \ldots, \eta_{n-r} = \eta_{n-r}(x).$$

Замену Φ всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство $\Phi(x_0) = 0$.