

Вестник Московского университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в ноябре 1946 г.

Серия 15

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
И КИБЕРНЕТИКА

№ 1 • 2013 • ЯНВАРЬ–МАРТ

Издательство Московского университета

Выходит один раз в три месяца

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| Воронцов Ю. О. Численный алгоритм для решения матричного уравнения $AX + X^*B = C$ | 3 |
| Чурбанов Д. В. Единственность определения коэффициента при производной в нелинейном уравнении первого порядка | 9 |
| Уразов А. С. Оптимальные параметры иерархических контролирующих структур | 15 |
| Подымов В. В. О проверке сильной эквивалентности металинейных унарных рекурсивных программ | 21 |
| Селезнева С. Н. Линейная оценка схемной сложности распознавания полиномиальности функций над кольцом вычетов по составному модулю | 27 |
| Наумов А. А. Эллиптический закон для случайных матриц | 31 |
| Вылиток А. А., Зубова М. А., Мельников Б. Ф. Об одном расширении класса конечных автоматов для задания контекстно-свободных языков | 39 |

Краткие сообщения

| | |
|---|----|
| Вороненко А. А., Федорова В. С. О порождении булевых функций в предположении монотонности | 46 |
|---|----|

CONTENTS

| | |
|--|----|
| Vorontsov Yu. O. Numerical algorithm for solving the matrix equation $AX + X^*B = C$ | 3 |
| Churbanov D. V. The unique determination of the coefficient near the derivative in the first order nonlinear equation | 9 |
| Urazov A. S. Optimal parameters of hierarchical controlling structures | 15 |
| Podymov V. V. On the strong equivalence checking for metalinear monadic recursive programs | 21 |
| Selezneva S. N. Circuit complexity of recognizing polynomiality for functions over residue modulo composite number is linear | 27 |
| Naumov A. A. Elliptic law for random matrices | 31 |
| Vylitok A. A., Zubova M. A., Melnikov B. F. An extension of the class of finite automata to specify the context-free languages | 39 |
| <i>Short communications</i> | |
| Voronenko A. A., Fedorova V. S. On the Boolean function generation under monotonicity | 46 |

УДК 519.6

Ю. О. Воронцов¹**ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОГО
УРАВНЕНИЯ $AX + X^*B = C$**

Предложен алгоритм типа Бартелса–Стьюарта для решения матричного уравнения $AX + X^*B = C$. Применением QZ-алгоритма исходное уравнение приводится к уравнению того же типа с треугольными матричными коэффициентами A и B . Полученное матричное уравнение эквивалентно последовательности систем линейных уравнений малого порядка относительно коэффициентов искомого решения. Посредством численных примеров моделируется ситуация, когда “почти” нарушены условия однозначной разрешимости. Прослежено ухудшение качества вычисленного решения в этой ситуации.

Ключевые слова: матричное уравнение, QZ-алгоритм, матричный пучок, собственное значение, циркулянт.

1. Введение. Матричное уравнение

$$AX + XB = C \quad (1)$$

называется непрерывным уравнением Сильвестра. В нем A и B — квадратные матрицы, вообще говоря, различных порядков m и n , а X и C — матрицы размера $m \times n$. Частным случаем уравнения (1) является (непрерывное) уравнение Ляпунова

$$AX + XA^T = C. \quad (2)$$

Дискретным уравнением Сильвестра называется уравнение

$$AXB - X = C. \quad (3)$$

Размеры матриц те же, что и для уравнения (1).

Условия однозначной разрешимости уравнений (1)–(3) хорошо известны (см., например, [1, гл. VIII, § 3] или [2, § 12]). Пусть $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \dots, m$, и $\lambda_j(B)$, $j = 1, 2, \dots, n$, — собственные значения соответственно матриц A и B .

Теорема 1. *Непрерывное уравнение Сильвестра однозначно разрешимо для любой правой части C , если*

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \neq 0 \quad \forall i, j.$$

Теорема 2. *Дискретное уравнение Сильвестра однозначно разрешимо для любой правой части C , если*

$$\lambda_i(A)\lambda_j(B) \neq 1 \quad \forall i, j.$$

В отличие от уравнений Сильвестра и Ляпунова, которым посвящены многие сотни работ, уравнение

$$AX + X^*B = C, \quad (4)$$

вынесенное в заголовок настоящей статьи, рассматривалось лишь в [3]. В общем случае матричные коэффициенты A и B уравнения (4) суть прямоугольные матрицы размеров соответственно $m \times n$ и $n \times m$, а C — квадратная матрица порядка m . Если $m \neq n$, то искомая матрица X — прямоугольная и ее размер совпадает с размером B .

Если все три матрицы A , B и C вещественны, то решение уравнения (4) сводится к решению уравнения $AX + X^T B = C$, исследованного в [4–6]. Поэтому в дальнейшем считаем A , B и C комплексными матрицами.

Хотя уравнения (1) и (4) очень похожи внешне, природа их различна. Приведем простой пример, иллюстрирующий это различие. Если $m = n$ и $A = B = I_n$, то уравнение Сильвестра имеет единственное решение $X = \frac{1}{2}C$ при любой правой части C . Для этих же значений m , n , A и B уравнение

¹ Факультет ВМК МГУ, асп., e-mail: vv@cs.msu.su