Вестник Московского университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в ноябре 1946 г.

Серия 15

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА

№ 1 • 2013 • ЯНВАРЬ–МАРТ

Издательство Московского университета

Выходит один раз в три месяца

СОДЕРЖАНИЕ

Краткие сообщения

CONTENTS

УДК 519.6

Ю. О. Воронцов[1]

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ $AX + X^*B = C$

Предложен алгоритм типа Бартелса–Стьюарта для решения матричного уравнения $AX + X^*B = C$. Применением QZ-алгоритма исходное уравнение приводится к уравнению того же типа с треугольными матричными коэффициентами A и B. Полученное матричное уравнение эквивалентно последовательности систем линейных уравнений малого порядка относительно коэффициентов искомого решения. Посредством численных примеров моделируется ситуация, когда "почти" нарушены условия однозначной разрешимости. Прослежено ухудшение качества вычисленного решения в этой ситуации.

Ключевые слова: матричное уравнение, QZ-алгоритм, матричный пучок, собственное значение, циркулянт.

1. Введение. Матричное уравнение

$$AX + XB = C \tag{1}$$

называется непрерывным уравнением Сильвестра. В нем A и B — квадратные матрицы, вообще говоря, различных порядков m и n, а X и C — матрицы размера $m \times n$. Частным случаем уравнения (1) является (непрерывное) уравнение Ляпунова

$$AX + XA^T = C. \tag{2}$$

Дискретным уравнением Сильвестра называется уравнение

$$AXB - X = C. \tag{3}$$

Размеры матриц те же, что и для уравнения (1).

Условия однозначной разрешимости уравнений (1)–(3) хорошо известны (см., например, [1, гл. VIII, § 3] или [2, § 12]). Пусть $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и $\lambda_j(B)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — собственные значения соответственно матриц A и B.

Т е о р е м а 1. *Непрерывное уравнение Сильвестра однозначно разрешимо для любой правой части* C, *если*

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \neq 0 \qquad \forall i, j.$$

Т е о р е м а 2. *Дискретное уравнение Сильвестра однозначно разрешимо для любой правой части* C, *если*

$$\lambda_i(A)\lambda_j(B) \neq 1 \qquad \forall i, j.$$

В отличие от уравнений Сильвестра и Ляпунова, которым посвящены многие сотни работ, уравнение

$$AX + X^*B = C, \tag{4}$$

вынесенное в заголовок настоящей статьи, рассматривалось лишь в [3]. В общем случае матричные коэффициенты A и B уравнения (4) суть прямоугольные матрицы размеров соответственно $m \times n$ и $n \times m$, а C — квадратная матрица порядка m. Если $m \neq n$, то и искомая матрица X — прямоугольная и ее размер совпадает с размером B.

Если все три матрицы A, B и C вещественны, то решение уравнения (4) сводится к решению уравнения $AX + X^TB = C$, исследованного в [4–6]. Поэтому в дальнейшем считаем A, B и C комплексными матрицами.

Хотя уравнения (1) и (4) очень похожи внешне, природа их различна. Приведем простой пример, иллюстрирующий это различие. Если $m = n$ и $A = B = I_n$, то уравнение Сильвестра имеет единственное решение $X = \frac{1}{2}C$ при любой правой части C. Для этих же значений m, n, A и B уравнение

[1] Факультет ВМК МГУ, асп., e-mail: vv@cs.msu.su