

УДК 514
ББК 22.151.0я721.9
М34

Математика. Сборник задач по углубленному курсу :
М34 учебно-методическое пособие / Б. А. Будак, Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов [и др.] ; под ред. М. В. Федотова. — 6-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2024. — 329 с. — (ВМК МГУ — школе). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-93208-741-1

Настоящее пособие составлено преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова на основе задач вступительных экзаменов по математике в МГУ и задач Единого государственного экзамена. Пособие содержит теоретический материал и подборку задач.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче Единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и в другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

УДК 514
ББК 22.151.0я721.9

Деривативное издание на основе печатного аналога: Математика. Сборник задач по углубленному курсу : учебно-методическое пособие / Б. А. Будак, Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов [и др.] ; под ред. М. В. Федотова. — 6-е изд. — М. : Лаборатория знаний, 2024. — 324 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе). — ISBN 978-5-93208-389-5.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации

ISBN 978-5-93208-741-1

© Б. А. Будак, Н. Д. Золотарёва,
Ю. А. Попов, В. В. Сазонов,
Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов, 2015
© Лаборатория знаний, 2015

Оглавление

От редактора	6
Предисловие	7

Часть I. Алгебра 9

1. Элементы теории чисел	9
1.1. Целые числа. Делимость и остатки	9
1.2. Уравнения в целых числах	11
1.3. Смешанные задачи на целые числа	14
1.4. Рациональные и иррациональные числа	17
1.5. Сравнение чисел	19
2. Тригонометрические неравенства, обратные тригонометрические функции	23
2.1. Основные свойства арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями	23
2.2. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями	27
2.3. Отбор решений в тригонометрических уравнениях. Тригонометрические неравенства	30
2.4. Смешанные задачи	33
3. Полезные преобразования и замены переменных	34
3.1. Использование формул сокращённого умножения, выделение полного квадрата	34
3.2. Замены переменных в рациональных уравнениях, неравенствах и системах	39
3.3. Замены переменных в иррациональных уравнениях, неравенствах и системах	42
3.4. Замены переменных в показательных и логарифмических уравнениях, неравенствах и системах	46
3.5. Замены в тригонометрических уравнениях и тригонометрические замены	50
4. Нестандартные текстовые задачи	53
4.1. Недоопределённые задачи	53
4.2. Неравенства в текстовых задачах	56
4.3. Оптимальный выбор, наибольшие и наименьшие значения	59
5. Использование свойств квадратного трёхчлена в задачах с параметрами	63
5.1. Исследование свойств квадратичной функции в зависимости от значений параметра. Теорема Виета	63
5.2. Теоремы о расположении корней квадратного трёхчлена на числовой оси	67
5.3. Смешанные задачи	73
6. Использование различных свойств функций и применение графических иллюстраций	75
6.1. Область определения функции, монотонность, периодичность, чётность и нечётность	75

6.2.	Множество значений функции, промежутки знакопостоянства и монотонности	78
6.3.	Функциональные уравнения и неравенства	83
6.4.	Использование графических иллюстраций	89
7.	Метод оценок	95
7.1.	Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства	95
7.2.	Тригонометрические уравнения и неравенства	98
7.3.	Уравнения и неравенства с логарифмическими и показательными функциями	104
8.	Задачи на доказательство	106
8.1.	Тригонометрические задачи на доказательство	106
8.2.	Метод математической индукции	109
8.3.	Доказательство неравенств и тождеств	111
9.	Использование особенностей условия задачи	114
9.1.	Оптимизация процесса решения, введение функций, искусственное введение параметров, смена ролей параметра и переменной	114
9.2.	Чётность и симметричность по нескольким переменным, исследование единственности решения, необходимые и достаточные условия	118
9.3.	Редукция задачи и переформулирование условия	123
9.4.	Смешанные задачи	127

Часть II. Геометрия 131

1.	Треугольники	131
1.1.	Прямоугольные треугольники	131
1.2.	Теоремы синусов и косинусов	143
1.3.	Биссектриса, медиана, высота	153
1.4.	Подобие треугольников	165
1.5.	Площадь треугольника	177
2.	Окружности	188
2.1.	Углы в окружностях	188
2.2.	Касательные, хорды, секущие	199
3.	Четырёхугольники и многоугольники	211
3.1.	Параллелограммы	211
3.2.	Трапеции	219
3.3.	Общие четырёхугольники и многоугольники	231
4.	Задачи на доказательство	245
4.1.	Треугольники	245
4.2.	Многоугольники	250
4.3.	Окружности	253
4.4.	Площади	257
5.	Задачи на построение	259
5.1.	Алгебраический метод	259
5.2.	Метод геометрических мест точек	263
5.3.	Метод симметрии и спрямления	270
5.4.	Метод параллельного переноса	274
5.5.	Метод подобия	281

5.6.	Метод поворота и смешанные задачи	285
6.	Стереометрия	290
6.1.	Введение	290
6.2.	Многогранники	294
6.3.	Тела вращения	300
6.4.	Комбинации тел	306
	Ответы	308
	Литература	324