



Издание осуществлено при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований по  
проекту №05-01-14035.

РЕДАКТОР-СОСТАВИТЕЛЬ — профессор *Ф.А. Богомолов*

АВТОР ПРЕДИСЛОВИЯ — академик РАН *И.Р. Шафаревич*

КОММЕНТАРИИ: профессор *Ф.А. Богомолов*,  
профессор *А.Л. Городенцев*,  
профессор *П. Ньюстед*,  
профессор *И. Пенков*,  
профессор *А.С. Тихомиров*

ПЕРЕВОД СТАТЕЙ НА РУССКИЙ ЯЗЫК — *Н.А. Тюрин*

ПОДГОТОВКА ИЗДАНИЯ К ПЕЧАТИ — *А.Л. Городенцев, С.А. Кулешов*

### **Тюрин А. Н.**

Сборник избранных трудов: В 3-х т. Т. 1. Геометрия векторных расслоений. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — 356 с.

Это — первый том трехтомного сборника избранных работ Андрея Николаевича Тюрин. Настоящий том включает в себя ряд наиболее ярких работ автора по классической алгебраической геометрии, написанных им в разное время, начиная с середины 60-х годов. Эти работы относятся в основном к теории векторных расслоений на алгебраических многообразиях различной размерности, находящейся на стыке различных направлений как в самой алгебраической геометрии, так и в ее многочисленных приложениях. Спектр рассматриваемых автором проблем чрезвычайно широк и многогранен — от геометрии стабильных векторных расслоений на алгебраических кривых к описанию симплектических структур и метрик на многообразиях модулей векторных расслоений на поверхностях, от метода суперпозиций в теории математических инстантов до приложений классической исчислительной геометрии к описанию гладких структур на четырехмерных многообразиях, от теории тэта-функций и лагранжевой геометрии до построения моделей Дельцана в конформной квантовой теории поля.

**ISBN 5-93972-364-0**

© Институт компьютерных исследований, для издания на русском языке, 2005

© А. Н. Тюрин, 2005

© Ф. А. Богомолов — редактор-составитель, 2005

<http://ics.org.ru>

# Оглавление

<b>1. Предисловие редактора-составителя . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>2. Андрей Николаевич Тюрин . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>3. Геометрия модулей векторных расслоений . . . . .</b>	<b>17</b>
Предисловие . . . . .	17
Глава 1. Введение . . . . .	18
§ 1. Различные трактовки понятия «векторное расслоение» . . . . .	18
§ 2. Точные тройки грассманизации . . . . .	20
§ 3. Специальные свойства расслоений на кривых . . . . .	26
§ 4. Вариации расслоений . . . . .	28
Глава 2. Расслоения Пуанкаре . . . . .	31
§ 1. Присоединенные расслоения Пуанкаре . . . . .	31
§ 2. Тензоры . . . . .	34
§ 3. Проблемы и гипотезы . . . . .	36
Глава 3. Элементарные операции и их вариации . . . . .	37
§ 1. Элементарные операции . . . . .	37
§ 2. Вариации элементарных операций . . . . .	42
Глава 4. Геометрия проблемы обращения . . . . .	45
§ 1. Конструкция минимального семейства . . . . .	45
§ 2. Второй класс Чженя . . . . .	48
Глава 5. Теорема Нарасимхана–Раманана . . . . .	50
§ 1. Двойное расслоение . . . . .	50
§ 2. Теорема обращения . . . . .	52
Литература . . . . .	54
<b>4. О классификации двумерных векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода . . . . .</b>	<b>56</b>
Введение . . . . .	56
Глава 1. Инварианты расслоений . . . . .	58
§ 1. Высота . . . . .	58

§ 2. Исключительные подрасслоения . . . . .	63
§ 3. Квазирасслоения . . . . .	67
Глава 2. Построение «универсальных» семейств и решение универсальной задачи для семейств расширений . . . . .	69
§ 1. Матричные дивизоры . . . . .	69
§ 2. Приведение к нормальному виду . . . . .	71
§ 3. Алгебраическая структура . . . . .	74
§ 4. Построение универсального семейства . . . . .	79
§ 5. Решение универсальной задачи для $EC(n, k, d)$ . . . . .	82
Глава 3. Слабая независимость инвариантов . . . . .	85
§ 1. Свойства квазирасслоений . . . . .	85
§ 2. Сечения матричного дивизора . . . . .	86
§ 3. Вычисление коразмерности многообразия $\mathcal{M}(n, k, d)$ . . . . .	91
§ 4. Следствия . . . . .	95
Литература . . . . .	97
<b>5. Конечномерные расслоения на бесконечных многообразиях . . . . .</b>	<b>99</b>
Введение . . . . .	99
Глава 1. Бесконечные многообразия . . . . .	100
§ 1. Линейные продолжения и бесконечные многообразия . . . . .	100
§ 2. Линейная связность бесконечного проективного многообразия . . . . .	105
Глава 2. Простейшие семейства расслоений над $P_1$ . . . . .	110
§ 1. Расслоения на $F_1$ . . . . .	110
§ 2. Расслоения на линейчатых многообразиях . . . . .	114
Глава 3. Конечномерные расслоения на бесконечных проективных многообразиях . . . . .	117
§ 1. Расслоения на $P_\infty$ . . . . .	117
§ 2. Расслоения на бесконечных проективных многообразиях . . . . .	120
Литература . . . . .	124
<b>6. Симплектические структуры на многообразиях модулей векторных расслоений на алгебраических поверхностях с <math>p_g &gt; 0</math> . . . . .</b>	<b>125</b>
Введение . . . . .	125
Глава 1. Симплектическая структура . . . . .	128
§ 1. Большая решетка и иерархия модулей . . . . .	128
§ 2. Решетка и структура Мукая . . . . .	134
§ 3. Симплектическая структура и локальный инвариант . . . . .	140
Глава 2. Модулярные операции . . . . .	145
§ 1. Специальные модулярные семейства . . . . .	145
§ 2. Операция универсального расширения . . . . .	151

§ 3. Операция универсального деления . . . . .	161
Глава 3. Универсальность . . . . .	169
§ 1. Конструктивная эквивалентность . . . . .	169
§ 2. Универсальность . . . . .	174
§ 3. Образ многообразия модулей в $K^0(S)$ . . . . .	179
Литература . . . . .	182
<b>7. Пространства модулей векторных расслоений на трехмерных многообразиях, поверхностях и кривых I . . . . .</b>	<b>184</b>
Введение . . . . .	184
§ 1. Поляризации. Теорема вложения . . . . .	189
§ 2. Компактификация. Продолжение отображения ограничения . . . . .	195
§ 3. Проективное пространство конформных блоков . . . . .	204
§ 4. Численные инварианты . . . . .	214
Литература . . . . .	225
<b>8. Классическая геометрия векторных расслоений . . . . .</b>	<b>227</b>
Введение . . . . .	227
§ 1. Кривые Клебша и Дарбу . . . . .	229
§ 2. Векторное расслоение над алгебраической поверхностью и его сечения . . . . .	233
§ 3. Первая интерпретация — многообразие модулей стабильных пар . . . . .	236
§ 4. Некоммутативные плоскости . . . . .	238
§ 5. Компактификация . . . . .	244
§ 6. Дифференциальная геометрия . . . . .	248
Литература . . . . .	253
<b>9. Метрика Вейля—Петерсона на пространстве модулей стабильных векторных расслоений и пучков над алгебраической поверхностью . . . . .</b>	<b>255</b>
Введение . . . . .	255
§ 1. Гиперкелеровы метрики . . . . .	258
§ 2. Стратификация пространства модулей . . . . .	262
§ 3. Пространство твисторов компоненты пространства модулей расслоений . . . . .	269
§ 4. Пространство твисторов тонкой компоненты многообразия модулей стабильных пучков . . . . .	276
§ 5. Заключительные замечания . . . . .	283
Литература . . . . .	284

<b>10. О суперпозициях математических инстантонов</b>	<b>287</b>
§ 0. Введение	287
§ 1. $M_n(H)$ как детерминантальный локус (детерминанталь)	288
§ 2. Суперпозиции	291
§ 3. Специальная суперпозиция	297
Литература	302
<b>11. Модели Дельцана пространств модулей</b>	<b>304</b>
§ 1. Введение	304
§ 2. Торическая структура на $\text{CLRep}(\pi_1(\Sigma))$	307
§ 3. Комбинаторные конструкции	309
§ 4. Пространства классов представлений	311
§ 5. Перестройки полиэдров	312
§ 6. Дельцановская модель	316
§ 7. Конформные блоки	318
Благодарности	319
Литература	319
<b>Комментарии</b>	<b>321</b>
Комментарий к статье «Геометрия модулей векторных расслоений» (А. С. Тихомиров)	323
Комментарий к статье «Геометрия модулей векторных расслоений» (П. Ньюстед)	324
Комментарий к статье «О классификации двумерных векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода» (Ф. А. Богомолов)	329
Комментарий к статье «О классификации двумерных векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода» (П. Ньюстед)	331
Комментарий к статье «Конечномерные расслоения на бесконечных многообразиях» (И. Пенков)	336
Комментарий к статье «Конечномерные расслоения на бесконечных многообразиях» (П. Ньюстед)	338
Комментарий к статье «Симплектические структуры на многообразиях модулей векторных расслоений на алгебраических поверхностях с $p_g > 0$ » (А. С. Тихомиров)	340
Комментарий к статье «Симплектические структуры на многообразиях модулей векторных расслоений на алгебраических поверхностях с $p_g > 0$ » (П. Ньюстед)	342

Комментарий к статье «Пространства модулей векторных расслоений на трехмерных многообразиях, поверхностях и кривых. I» ( <i>А. С. Тихомиров</i> ) . . . . .	343
Комментарий к статье «Пространства модулей векторных расслоений на трехмерных многообразиях, поверхностях и кривых I» ( <i>П. Ньюстед</i> )	345
Комментарий к статье «Классическая геометрия векторных расслоений» ( <i>А. С. Тихомиров</i> ) . . . . .	347
Комментарий к статье «Классическая геометрия векторных расслоений» ( <i>П. Ньюстед</i> ) . . . . .	349
Комментарий к статье «Метрика Вейля—Петерсона на пространстве модулей стабильных векторных расслоений и пучков над алгебраической поверхностью» ( <i>Ф. А. Богомолов</i> ) . . . . .	350
Комментарий к статье «О суперпозициях математических инстантонов» ( <i>А. С. Тихомиров</i> ) . . . . .	352
Комментарий к статье «Модели Дельцана для пространств модулей» ( <i>А. Л. Городенцев</i> ) . . . . .	354