

УДК 533; 517.92517.944

ОБ ИСТОЧНИКЕ ГАЗА В ПОЛЕ ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ

Д. В. Паршин, А. П. Чупахин*

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mail: danilo-skiman@gorodok.net

Исследуется небарохронная регулярная частично инвариантная подмодель уравнений газовой динамики. Подмодель сводится к неявному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для вспомогательной функции $X = X(x)$. Физические величины (скорость, плотность, давление) выражаются через функцию X . Исследованы свойства и в терминах движения газа дана физическая интерпретация решений уравнения. Доказано существование решения с ударной волной. Изучены свойства ударной адиабаты. Показано, что полученные результаты существенно отличаются от результатов для случая, когда постоянная сила отсутствует, и являются новыми.

Ключевые слова: частично инвариантное решение, дискриминантная кривая, пространство струй, неправильная особая точка, проективная замена, звуковая линия, стационарная ударная волна.

Введение. Групповой анализ дифференциальных уравнений [1] является эффективным методом построения широких классов точных решений моделей механики сплошных сред, в частности газовой динамики. В работе [2] исследуется точное решение уравнений газовой динамики, описывающее двумерное движение газа в поле силы с постоянным ускорением (силы тяжести). Это движение порождается регулярной частично инвариантной подмоделью, задаваемой 4-мерной алгеброй, при добавлении внешней силы в первое уравнение импульсов. Соответствующая подмодель для случая, когда сила отсутствует, описана в [3]. Движение газа при наличии потенциальных внешних сил, описываемое простой волной, рассматривается в [4]. Предлагаемое решение не сводится к простой волне и является новым.

Исследованы решения, соответствующие различным режимам движения газа при различных соотношениях кинетической и потенциальной энергий. Математическая модель сводится к неявному дифференциальному уравнению первого порядка. Свойства подобных уравнений описаны в [5].

1. Описание модели. Алгебра, порождающая решение, имеет базис $L_4 = \langle \partial_y, \partial_z, t\partial_y + \partial_v, \partial_t \rangle$. Инвариантами данной подмодели являются x, u, w, ρ, p, S , где u, w — компоненты скорости; термодинамические параметры ρ, p, S — плотность, давление и энтропия соответственно. Лишняя функция — компонента скорости v . Представление решения имеет вид

$$u = u(x), \quad v = v(t, x, y, z), \quad w = w(x), \quad (\rho, S, p) \mid x.$$

Уравнения подмодели имеют вид

$$\begin{aligned} uu' + \rho^{-1}p' &= g_0, & v_t + uv_x + vv_y + wv_x &= 0, & uw' &= 0, \\ u\rho' + \rho(u' + v_y) &= 0, & uS' &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $g_0 = \text{const}$, $g_0 \neq 0$; штрих означает дифференцирование по x .

Рассмотрим случай $u \neq 0$. Тогда подмодель (1.1) описывает изоэнтропические движения газа $S = s_0 = \text{const}$. Кроме того, из третьего уравнения (1.1) следует, что $w = W_0 = \text{const}$, из четвертого уравнения получаем представление

$$v = h(x)y + V(t, x, z), \quad (1.2)$$

где

$$h = -(u(\ln \rho)' + u'). \quad (1.3)$$

Подставляя представление (1.2) во второе уравнение (1.1) и расщепляя полученные соотношения по y , получим

$$uh' + h^2 = 0; \quad (1.4)$$

$$V_t + uV_x + W_0V_x + hV = 0. \quad (1.5)$$

Первое и третье уравнения в (1.1), а также уравнения (1.3), (1.4) образуют инвариантную подсистему. Переопределенная система для неинвариантной компоненты, включающая второе и четвертое уравнения из (1.1), расщепляется на инвариантное уравнение (1.4) и уравнение (1.5) для неинвариантной части. После интегрирования инвариантной подсистемы (1.5) интегрируется как линейное уравнение.

Интегрирование инвариантной системы можно свести к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка и нескольким квадратурам. Введем функцию $\sigma = \sigma(x)$, $\sigma \neq \text{const}$, так что $\sigma = 1/h$. Тогда уравнение (1.4) принимает вид $u\sigma' = 1$ и получаем представление

$$u = 1/\sigma', \quad h = 1/\sigma. \quad (1.6)$$

В терминах функции $\sigma(x)$ уравнение неразрывности (1.3) имеет вид $(\ln \rho)' - \sigma''/\sigma' + \sigma'/\sigma = 0$ и интегрируется:

$$\rho = R_0|\sigma'/\sigma|, \quad R_0 = \text{const}. \quad (1.7)$$

Функция $\sigma = \sigma(x)$ является решением первого уравнения импульсов в (1.1), проинтегрировав которое получаем инвариантный интеграл Бернулли:

$$u^2/2 + I(\rho) = g_0x + b_0 \quad (1.8)$$

($I(\rho) = \int dp/\rho$ — энтальпия газа). Для политропного газа $p = S_0\rho^\gamma$ (движение изоэнтропическое). Подставляя (1.6), (1.7) в (1.8), получаем

$$\frac{1}{2(\sigma')^2} + \frac{c_0^2}{\gamma - 1} \left| \frac{\sigma'}{\sigma} \right|^{\gamma-1} = g_0x + b_0, \quad (1.9)$$

где $c_0^2 = \gamma S_0 R_0^{\gamma-1} = \text{const}$.

Интегралы уравнения (1.5) выражаются через функцию $\sigma = \sigma(x)$ конечными формулами. В результате получаем решение в виде

$$u = \frac{1}{\sigma'}, \quad v = \frac{y + H(\xi, \eta)}{\sigma}, \quad w = W_0, \quad \rho = R_0 \left| \frac{\sigma'}{\sigma} \right|, \quad S = S_0, \quad p = S_0\rho^\gamma, \quad (1.10)$$

где H — произвольная функция аргументов $\xi = t - \sigma(x)$, $\eta = z - W_0 t$; W_0 , R_0 , S_0 — произвольные константы. Функция $\sigma = \sigma(x)$ удовлетворяет уравнению (1.9).

2. Ключевое уравнение. Уравнение (1.9) можно записать в виде

$$(\sigma')^2 \left| \frac{\sigma'}{\sigma} \right|^{\gamma-1} - \frac{g_0(\gamma-1)}{c_0^2} \left(x + \frac{b_0}{g_0} \right) (\sigma')^2 + \frac{\gamma-1}{2c_0^2} = 0. \quad (2.1)$$

Теорема 1. *Размерность пучка интегральных кривых для ключевого уравнения (2.1) не превышает четырех для произвольного рационального показателя $\gamma > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ключевое уравнение (2.1) для любых рациональных показателей γ либо является алгебраическим относительно производной, либо сводится к таковому заменой переменных.

Для оценки числа положительных вещественных корней можно применить правило Декарта, согласно которому количество положительных вещественных корней многочлена не превышает числа перемен знаков в последовательности его коэффициентов [6].

Учитывая, что рациональное число $\gamma > 1$, рассмотрим все возможные случаи:

$$\gamma = 2m, \quad \gamma = 2m+1, \quad \gamma = \frac{2m}{2n+1}, \quad \gamma = \frac{2m+1}{2n}, \quad \gamma = \frac{2m+1}{2n+1} \quad (2.2)$$

(m, n — натуральные числа).

1. Пусть в (2.2) $\gamma = 2m$. Тогда ключевое уравнение (2.1) записывается в виде

$$(\sigma')^2 \left| \frac{\sigma'}{\sigma} \right|^{2m-1} - \frac{g_0(2m-1)}{c_0^2} \left(x + \frac{b_0}{g_0} \right) (\sigma')^2 + \frac{2m-1}{2c_0^2} = 0. \quad (2.3)$$

Область существования решения делится на две части: область, где $\sigma\sigma' \geq 0$, и область, где $\sigma\sigma' < 0$. В каждой из этих областей модуль раскрывается двумя способами. Выпишем последовательность знаков при соответствующих степенях производной в зависимости от знака σ и σ' :

- если $\sigma\sigma' \geq 0$, то $(+, -, +)$;
- если $\sigma\sigma' < 0$, то $(-, -, +)$.

В каждой из перечисленных областей ключевое уравнение имеет не более двух положительных корней. Для того чтобы подсчитать число отрицательных корней, необходимо выполнить замену $\sigma' \rightarrow -\sigma'$. Однако в этом случае число отрицательных корней также не превышает двух, следовательно, ключевое уравнение имеет не более четырех вещественных корней в области существования решения, и для него существует не более четырех интегральных кривых, проходящих через одну точку. Теорема доказана.

2. Если $\gamma = 2m+1$, последовательность знаков сохраняется.

3. Если $\gamma = 2m/(2n+1)$, то ключевое уравнение заменой $(\sigma')^{1/(2n+1)} \rightarrow q$ сводится к уравнению (2.3), для которого необходимое утверждение уже доказано.

4. Если $\gamma = (2m+1)/(2n)$, то замена $(\sigma')^{1/(2n)} \rightarrow q$ в ключевом уравнении вновь приводит к уравнению (2.3). Следует отметить, что при замене извлекается корень четной степени, но на число корней это не оказывает влияния, так как знакоопределенность функции σ уже учтена.

5. Если $\gamma = (2m+1)/(2n+1)$, то замена $(\sigma')^{1/(2n+1)} \rightarrow q$ приводит ключевое уравнение к уравнению (2.3), для которого необходимое утверждение доказано.

Таким образом, для всех возможных рациональных показателей γ размерность пучка интегральных кривых ключевого уравнения (2.1) не превышает четырех.

Для определенности рассмотрим случай $\gamma = 3$. Выполняя замену

$$x + b_0/g_0 \rightarrow x, \quad \sigma \rightarrow |1/c_0|X$$