# ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

## Физико-математические науки

## Математика

### *Вещественный, комплексный и функциональный анализ*

***Яндаров В.О.,*** *кандидат физико-математических наук, профессор, советник ректора Грозненского государственного нефтяного института им. академика М.Д. Миллионщикова*

## КРИТЕРИИ РАЗРЕШИМОСТИ ПРОБЛЕМЫ С. БАНАХА О РАЗЛОЖИМОСТИ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

*Устанавливаются критерии отрицательной разрешимости проблемы С. Банаха о разложимости банаховых пространств.*

***Ключевые слова:*** *банахово пространство, подпространство, рефлексивность, сопряженное.*

## THE PROBLEM OF SOLUTION CRITERIA OF S. BANAKH ABOUT DECOMPOSITION BANAKHOV'S SPACES

*The problems about decomposition Banakhov's space and the criteria negative solution are established.*

***Keywords:*** *Banakhov's space, subspace, reflexifity, conjugate.*

Как обычно, мы начинаем статью с определений, которые либо редко встречаются, либо которых нет в математике. Пусть $X_1$ и $X$ – бесконечномерные банаховы пространства над одним и тем же числовым полем, скажем, действительных чисел. Если рассматривается символика $X_1 \in E(X)$, то это означает, что $X_1$ слабо компактно и плотно вложено в $X(X_1 \subset X)$. Если $X_1 \in E(X)$, то через $Z^*$ обозначается замыкание $X^*$, сопряженного к X пространства, в пространстве $X^*_1$, сопряженном к $X_1$. Отметим, что $Z^*$ часто не является сопряженным пространством. Мы часто исследуем бесконечномерные банаховы пространства X и $X_1$ такие, что $Z^*$ является сопряженным пространством по отношению к $X_1$ или его подпространству. Пространство $Z^*$ участвует в определениях важных понятий дефлектора и тотализатора. Подпространство $Y \subset X^*_1$, сопряженного к $X_1$ пространства, называется регулярно замкнутым или (*) – замкнутым, если для $\forall\, x^* \in X^*_1 \backslash Y$ существует такой элемент $x \in X_1$, что:

$$x^*(x)=1,\ \ x(Y)=0\ \text{ или } x(y)=0\ \forall\, y \in Y. \qquad (1)$$

Подпространство $Y \subset X^*_1$, называется квазирегулярно замкнутым в $X^*_1$, если выполняются равенства (1), когда $x \in W_x(X_1)$. Через $W_x(X_1)$ обозначается относительное пополнение $X_1 \in E(X)$ относительно X[1]. Известно [1,2], что $Z^{**}=W_x(X_1)$ – сопряженное к $Z^*$ пространство.

Ненулевой элемент $x^* \in X^*_1$ называется дефлектором (в $X^*_1$), если его гиперподпространство (ядро) $\mathrm{Ker}x^* \subset X_1$ обладает свойством (W), что означает по определению выполнение равенства: $W_x(\mathrm{Ker}x^*)=W_x(X_1)$, т.е. относительное пополнение гиперподпространства (ядра) $\mathrm{Ker}x^*$ совпадает с относительным пополнением $W_x(X_1)$ всего пространства $X_1$ относительно X. Ненулевой элемент $x^{**} \in X^{**}_1$, второго сопряженного к $X_1$, называется тотализатором (в $X^{**}_1$), если $x^{**}(z^*)=0,\ \forall\, z^* \in Z^*$. Ясно, что если $X^*_1=Z^*$, то не существует ни тотализаторов, и ни дефлекторов.

ŋqddqɇeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɇè



Подпространство $Y \subset X^*_1$ называется тотальным (на $X_1$), если для $x \in X_1$ и любого $x^* \in Y$ выполняется равенство $x^*(x)=0$, то $x$ – нулевой элемент в $X_1$. Очевидно, если подпространство $Y \subset X^*_1$ не тотально на $X_1$, то существует ненулевой элемент $y \in X_1$ такой, что $x^*(y) = 0$, $\forall x^* \in Y$.

Пусть $Y_1$ и $Y_2$ – подпространства в $X_1$, отличные от нуль-элемента. Если $X_1$ представимо в виде суммы (алгебраической):

$$X_1= Y_1+Y_2, \quad Y_1 \cap Y_2=\{0\},$$

то эта сумма называется прямой суммой и обозначается: $X_1= Y_1 \oplus Y_2$ [3–6]. Оператор P: $X_1 \to Y_1$ или $P(X_1)=Y_1$ называется проектором $X_1$ на $Y_1$, а подпространство $Y_1$ называется дополняемым в $X_1$. Если проектор P непрерывен, то прямая сумма $X_1=Y_1 \oplus Y_2$ называется топологической (обозначение: $X_1=Y_1 \dot{+} Y_2$). Известно (см., например, [3]), что если $Y_1$ и $Y_2$ в прямой сумме – замкнутые подпространства в $X_1$, то прямая сумма $X_1=Y_1 \oplus Y_2$ является топологической. Во всех своих работах мы под прямой суммой понимаем топологическую прямую сумму и в большинстве случаев не вводим других обозначений, так как $Y_1$ и $Y_2$ у нас мыслятся замкнутыми подпространствами. Если одно из двух слагаемых в прямой сумме является аннулятором какого-нибудь подпространства в $X_1$ или $X^*_1$, то прямое слагаемое называется супердополняемым в рассматриваемом пространстве.

**Т е о р е м а 1.** Для того чтобы бесконечномерное банахово пространство $X_1$ было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы каждое собственное замкнутое подпространство $Y \subset X^*_1$ было не тотально на $X_1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $X_1$ рефлексивно. Тогда, как известно [4-6], сопряженное к $X_1$ пространство $X^*_1$, также рефлексивно. Кроме того, также известно, что каждое замкнутое подпространство $Y \subset X_1$ или $Y \subset X^*_1$ рефлексивного пространства является рефлексивным. Следовательно, если $X_1$ рефлексивно, то любое собственное замкнутое подпространство $Y \subset X^*_1$ является сопряженным к некоторому замкнутому подпространству $Y_1 \subset X_1$: $Y=Y^*_1$. В самом деле, так как $X^*_1$, Y и $Y^*$ рефлексивны, то можно рассматривать $X^*_1 \in E(X^*_1)$. По определению $Z^*$ – замыкание $X^{**}_1=X_1$ в $X^{**}_1=X_1$. Тогда замкнутое подпространство $Y \subset X^*_1$ имеет сопряженное пространство $Y^* \subset X_1=Z^*$. Отсюда следует, что $Y^*=Y_1$- замкнутое подпространство в $X_1$ и $Y^*_1=Y=Y^{**}$, т.е. $Y \subset X^*_1$ является регулярно замкнутым в $X^*_1$: для любого $x^* \in X^*_1 \setminus Y$ существует такой элемент $x \in X_1$, что выполняются равенства (1). Из этих равенств вытекает, что Y не тотально на $X_1$. В силу произвольности выбора собственного замкнутого подпространства $Y \subset X^*_1$ необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть каждое собственное замкнутое подпространство $Y \subset X^*_1$ не тотально на $X_1$. В частности, нетотальным на $X_1$ будет и каждое гиперподпространство $\mathrm{Ker}x^{**} \subset X^*_1$ ($x^{**} \in X^{**}_1$). Тогда по теореме 2 в [8] ядро $\mathrm{Ker}x^{**}$ любого функционала $x^{**} \in X^{**}_1$, второго сопряженного к $X_1$, будет регулярно замкнуто в $X^*_1$: $\forall x^* \in X^*_1 \setminus \mathrm{Ker}x^{**}$ существует элемент $x \in X_1$ такой, что $x^*(x)=1$, $x(\mathrm{Ker}x^*)=0$. Из последнего равенства следует существование числа $\lambda$ такого, что $x^{**}= \lambda x \in X_1$, т.е. $X^{**}_1 \subset X_1$. Отсюда, так как $X_1$ естественно вложено в $X^{**}_1$, следует равенство $X^{**}_1=X_1$, что означает рефлексивность $X_1$. Теорема 1 доказана.

С л е д с т в и е 1. Для того чтобы $X_1$ было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы каждое гиперподпространство в $X^*_1$ было не тотально на $X_1$ (регулярно замкнуто на $X_1$).

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству теоремы 1.

**Т е о р е м а 2.** Пусть $X_1 \in E(X)$. Следующие утверждения эквивалентны: 1) $X^*_1=Z^*$; 2) сопряженное $Y^*$ к любому собственному замкнутому подпространству $Y \subset X_1$ регулярно замкнуто в $X^*_1$, сопряженном к $X_1$; 3) сопряженное $Y^*$ к любому собственному замкнутому подпространству $Y \subset X_1$ не тотально на $X_1$.



ŋqddqɇeɎ bɆ dədɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɏ Ɉqddɏqɇè

Доказательство. Пусть $X^*_1=Z^*$. Тогда по теореме 9 в [7] сопряженное $Y^*$ к любому замкнутому подпространству $Y\subset X_1$ регулярно замкнуто в $X^*_1$. Это означает, что для любого $Y\subset X_1$ пространство $Y^*$ не тотально на $X_1$ (см. равенства (1)), т.е. справедливо утверждение 3). Доказаны импликации $1)\Rightarrow 2)\Rightarrow 3)$. Докажем, что из утверждения 3) вытекает утверждение 1). Предположим, что существует дефлектор $x^*\in X^*_1$. Это означает, что ядро $\mathrm{Ker}x^*$ обладает свойством (W):$W_x(\mathrm{Ker}x^*)=W_x(X_1)$ ($\mathrm{Ker}x^*\in$(W)). Пространство $(\mathrm{Ker}x^*)^*$, сопряженное к $\mathrm{Ker}x^*$, тотально на $X_1$. В самом деле, так как $\mathrm{Ker}x^*\subset X_1$, то $X^*_1\subset(\mathrm{Ker}x^*)^*$. Отсюда, так как всегда $Z^*\subset X^*_1$, получаем, что $Z^*\subset(\mathrm{Ker}x^*)^*$. Следовательно, сопряженное пространство $(\mathrm{Ker}x^*)^*$ тотально на $X_1(W_x(X_1))$. Это противоречит утверждению 3). Следовательно, предположение о том, что существует дефлектор $x^*\in X^*_1$, не верно. Итак, импликация $3)\Rightarrow 1)$ справедлива. Теорема 2 доказана.

С л е д с т в и е 2. Пусть $X_1\in E(X)$. Следующие утверждения эквивалентны: 1) $X^*_1=Z^*$; 2) сопряженное $Y^*$ к любому гиперподпространству $Y=\mathrm{Ker}x^*$, где $x^*$ – ненулевой элемент из $X^*_1$, сопряженного к $X_1$, регулярно замкнуто в $X^*_1$; 3) сопряженное $Y^*$ к любому гиперподпространству $Y=\mathrm{Ker}x^*(x^*\in X^*_1)$ не тотально на $X_1$.

**Т е о р е м а 3.** Следующие утверждения эквивалентны: 1) $X_1$ рефлексивно; 2) каждое собственное замкнутое подпространство Y в $X^*_1$, сопряженном к $X_1$, регулярно замкнуто в $X^*_1$; 3) каждое собственное замкнутое подпространство $Y\subset X^*_1$ не тотально на $X_1$.

Доказательство. По теореме 3 в [9] утверждения 1) и 2) эквивалентны. На основании теоремы 1 данной статьи эквивалентны утверждения 1) и 3). Теорема 3 доказана.

С л е д с т в и е 3. Следующие утверждения эквивалентны: 1) $X_1$ рефлексивно; 2) каждое гипереподпространство $Y\subset X^*_1$ регулярно замкнуто в $X^*_1$; 3) каждое гипереподпространство $Y\subset X^*_1$ не тотально на $X_1$.

Доказательство аналогично доказательствам теоремы 1 данной статьи и теоремы 3 в [9].

**Т е о р е м а 4.** Для того чтобы $X_1$ было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы для каждого собственного замкнутого подпространства Y в $X^*_1$, сопряженном к $X_1$, существовало такое собственное замкнутое подпространство $Y_1\subset X_1$, что имеет место прямая сумма:

$$X_1=Y_1\oplus Y^{\perp}(X_1). \tag{2}$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. При доказательстве необходимости в теореме 1 было доказано, что если $X_1$ рефлексивно, то любое замкнутое подпространство $Y\subset X^*_1$ является сопряженным к некоторому замкнутому подпространству $Y_1\subset X_1$:$Y=Y^*_1$. Тогда по теореме 8 в [10] справедливо равенство (2).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть имеет место прямая сумма (2). Из равенства (2) следует, что каждое собственное замкнутое подпространство $Y\subset X^*_1$ не тотально на $X_1$ или регулярно замкнуто в $X^*_1$. Тогда по теореме 3 $X_1$ рефлексивно. Теорема 4 доказана.

Замечание. Анализируя теорему 4, в частности, можно сделать следующий вывод: в пространстве $X^*_1$, сопряженном к рефлексивному пространству $X_1$, каждое замкнутое подпространство $Y\subset X^*_1$ является сопряженным к некоторому замкнутому подпространству в $X_1$. Следовательно, в рефлексивных пространствах $X_1$ и $X^*_1$ их замкнутые подпространства находятся во взаимнооднозначном соответствии. Таким образом, формулировка теоремы 4 для произвольного замкнутого подпространства в $X^*_1$ равносильна формулировке этой теоремы для супердополняемости произвольного замкнутого подпространства в $X_1$, т.е. теорема 4 так же, как и теорема 8 в [10], решает проблему С. Банаха о разложимости банаховых пространств [7-10]. Поэтому имеет место следующее утверждение.

С л е д с т в и е 4. Для того чтобы $X_1$ было не рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве $X^*_1$, сопряженном к $X_1$, существовало собственное замкнутое подпро-