ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Физико-математические науки

Математика

Вычислительная математика

Мусаев А.М., *старший преподаватель Азербайджанской государственной нефтяной академии*

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННЫМИ ИТЕРАЦИОННЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В $L_\sigma^p(R^+)$

В настоящей работе предлагается способ построения нового обобщенного итерационного оператора, дающего высокий порядок приближения в $L_\sigma^p(R^+)$ $(p \ge 1)$.

Ключевые слова: *проблема насыщения, классы, линейные операторы, сингулярные интегралы.*

ON FUNCTION APPROXIMATION USING GENERIC ITERATIVE INTEGRAL OPERATORS IN $L_\sigma^p(R^+)$

This work proposes a method for composing a new generic iterative operator providing a higher approximation order in $L_\sigma^p(R^+)$ $(p \ge 1)$.

Keywords: *saturation problem, classes, linear operators, singular integrals.*

Абстракт

Проблема насыщения была впервые поставлена Фаваром в 1937 году.

В решении проблемы определения классов насыщения получен ряд важных результатов Алексичем, Заманским, Алянчичем, Ф.И. Харщиладзе, А.Х.Турецким, Бутцером, Беренцом, Несселем, Суноути, Р.Г. Мамедовым и другими. Беренцом и Бутцером [1] определены класс и порядок насыщения приближения функции $f(t)(e^{-ct}f(t) \in L_p(0,\infty), C>0, p \ge 1)$ линейным оператором

$$R(f;x) = \lambda \int_0^x f(x-t) K_\lambda(t)dt$$

с положительным ядром $K_\lambda(t) = \lambda K(\lambda t) > 0$ в метрике пространства $L_p(0;\infty)$. Они показали, что порядок насыщения есть $0(\lambda^{-\gamma})$ $(0<\gamma \le 1)$.

Пользуясь методом преобразования Фурье, Бутцер, Нессель [2], Суноути [6], Р.Г. Мамедов [3] и другие определили порядок и класс насыщения различных сингулярных интегралов и линейных операторов в пространстве $L_p(-\infty;\infty)$.

Основные результаты, полученные за последние годы различными авторами о решении проблемы насыщения, подробно изложены в монографиях Р.Г. Мамедова [3] и Бутцера-Беренца [5]. В работах [7] и [8] были рассмотрены линейные интегральные операторы, дающие высокий порядок приближения.

ŋdqdyeY bȨ dedȨbYae d acdacy Jddqdyè

В настоящей работе предлагается способ построения на основе оператора

$$T_{\lambda,i}(f;x)=\int_0^{\frac{x}{\alpha_i(\lambda)}} f(x-\alpha_i(\lambda)t)K_{\lambda,i}(t)dt$$

нового обобщенного итерационного оператора, дающего высокий порядок приближения в $L_\sigma^p(R^+)\ (p\ge 1)$.

Пусть E – некоторое множество на вещественной оси; λ_0 – предельная точка множества E. $\lambda\in E;\ \alpha_i(\lambda)\ \ (i=\overline{1,e}),\ \beta_j(\lambda)\ \ (j=\overline{0,N})$ – числовые функции, обладающие свойствами:

d₁) $\sum_{j=1}^{N}\beta_j(\lambda)=1$ для каждого $\lambda\in E$,

d₂) $\sum_{j=1}^{N}\left|\beta_j(\lambda)\right|\le M$, где M не зависит от $\lambda\in E$,

d₃) $0<\delta\le\alpha_i(\lambda)\le\alpha$, где α не зависит ни от λ и не от $i=1,2,...,e$.

$K_{\lambda,i}(t)\ \ (i=\overline{1,e})$, определённая на $R^+=(0,\infty)$ функции, называемая ядром, со свойствами:

l₁) $K_{\lambda,i}(t)\in L(R^+)\ \ (i=\overline{1,e})$ и $\int_0^{\infty}K_{\lambda,i}(t)dt\ \ (i=\overline{1,e})$

l₂) $\int_0^{\frac{x}{\alpha_i(\lambda)}}K_{\lambda,i}(t)dt\xrightarrow{\lambda\to\lambda_0}1\ \ (i=\overline{1,e})$.

Выражение

$$H_\lambda^{[e,N]}(f;x)=\int_0^{\frac{x}{\alpha_e(\lambda)}}\sum_{j=1}^{N}\beta_j(\lambda)\left(W_\lambda^{[e-1,j]}f*\widetilde{K}_{\lambda,e}^{\,j-1}\right)(x-\alpha_e(\lambda)t)K_{\lambda,e}(t)dt\ \ (i=\overline{1,e}) \qquad (1)$$

будем называть обобщенными итерационным оператором, где

$$W_\lambda^{[e;j]}(f;x)=\begin{cases}W_\lambda^{[e,0]}(f;x)=W_\lambda^{[0,j]}(f;x)=f(x) & \text{при } l,j\in N,\\ W^{[e]}(W^{[e;j-1]}(f;x) & \text{при } e,j\in N\end{cases}$$

$$W_\lambda^{[e]}(f;x)=\begin{cases}f(x) & \text{при } e=0,\\ T_{\lambda,1}(T_{\lambda,2}(...(T_{\lambda,e}(f;x))...) & \text{при } e\ge 1,\end{cases}$$

$$(\varphi*g)(x)=\int_0^x\varphi(x-t)g(t)dt,$$

$$g^{*j}(x)=\begin{cases} g(x), \text{ при } j=1 \\ (g*g^{*j-1}), \text{ при } j\geq 2 \end{cases}$$

и

$$\widetilde{K}_{\lambda,e}(t)=\frac{1}{\alpha_e(\lambda)}K_{\lambda,e}\left(\frac{t}{\alpha_e(\lambda)}\right).$$

Заметим, что если $f(x)\in L_\sigma^p(R^+)$ и $K_{\lambda,i}(t)\in L(R^+)$ $(i=\overline{1,e})$, то оператор (1) существует почти всюду на R^+ и выполняется неравенство

$$\left\|H_\lambda^{[e,N]}(f;\cdot)\right\|_{L_\sigma^p(R^+)}\leq\left[\sum_{j=1}^{N}\left|\beta_j(\lambda)\right|\prod_{i=1}^{e}\left\|K_{\lambda,i}\right\|_{L(R^+)}^{j}\right]\|f\|_{L_\sigma^p(R^+)}$$

Для дальнейших изложений нам понадобятся следующие условия:

Условие $G(\varphi)$. Если для неотрицательной функции $\varphi_N(\lambda)$ $(\varphi_N(\lambda)\to 0$ $(\lambda\to\lambda_0))$ и функции $\xi_{e,N}(s)$ удовлетворяется условие:

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{1-\sum_{j=1}^{N}\beta_j(\lambda)\prod_{i=1}^{e}\left[K_{\lambda,i}^{\wedge}(\alpha_i(\lambda)s)\right]^j}{\varphi_N(\lambda)}=\xi_{e,N}(s)\neq 0, \qquad (2)$$

то будем говорить, что ядро $K_{\lambda,i}(t)$ $(i=\overline{1,e})$ интегрального оператора (1) удовлетворяет условию $G(\varphi)$.

Введём класс функций:

$$m\left[L_\sigma^p(R^+);\xi_{e,N}(s)\right]=\left\{f(x)\in L_\sigma^p(R^+)\middle|\xi_{e,N}(s)f^{\wedge}(s)=h^{\wedge}(s),h(x)\in L_\sigma^p(R^+)\right\}$$

$$n\left[L_\sigma^p(R^+);\xi_{e,N}(s)\right]=\begin{cases} f(x)\in L_\sigma(R^+)\middle|\xi_{e,N}(s)f^{\wedge}(s)=\mu^{\wedge}(s),\mu(x)\in BVL_\sigma(R^+)\ (p=1) \\ f(x)\in L_\sigma^p(R^+)\middle|\xi_{e,N}(s)f^{\wedge}(s)=h^{\wedge}(s),h(x)\in L_\sigma^p(R^+)\ \ (p>1) \end{cases}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть ядро сингулярного интеграла (1) удовлетворяет условию $G(\varphi)$ и $f(x)\in L_\sigma^p(R^+)$ $(\sigma>0,\ p\geq 1)$. Тогда если для функции $h(x)\in L_\sigma^p(R^+)$ имеет место:

$$\left\|\frac{f(x)-H_\lambda^{[e,N]}(f;x)}{\varphi_N(\lambda)}-h(x)\right\|_{L_\sigma^p(R^+)}=0(1) \qquad (3)$$

при $\lambda\to\lambda_0$, то $f(x)=m[L_\sigma^p(R^+);\ \xi_{e,N}(s)]$