

## ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

### Физико-математические науки

#### Математика

#### Вещественный, комплексный и функциональный анализ

**Яндаров В.О.**, кандидат физико-математических наук, профессор, советник ректора Грозненского государственного нефтяного технического института им. академика М.Д. Миллионщикова

#### НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В статье рассматриваются и доказываются теоремы, относящиеся к банаховым пространствам.

**Ключевые слова:** банахово пространство, подпространство, сопряженность.

#### SOME CHARACTERIZATION OF BANACH SPACES

This article describes and proves theorems related to Banach spaces.

**Keywords:** banach space, subspace, conjugate.

Если бесконечномерное банахово пространство  $X_1$  слабо компактно и плотно вложено в такое же пространство  $X$ , то это обозначается  $X_1 \in E(X)$ . Если  $X_1 \in E(X)$ , то через  $Z^*$  обозначается замыкание  $X^*$ , сопряженного к  $X$ , в пространстве  $X_1^*$ , сопряженном к  $X_1$ ;  $W_x(X_1)$  – относительно пополнение  $X_1$  относительно  $X$  [1]: если  $B_1(X_1)$  – пополнение замкнутого единичного шара  $B(X_1) \subset X_1$  по норме в  $X$  или в топологии  $\sigma(W_x(X_1), Z^*)$  [7], то  $W_x(X_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_1(X_1)$ . Ненулевой элемент  $x^* \in X_1^*$ , сопряженного к  $X_1$  пространства, называется дефлектором в  $X_1^*$ , если гиперподпространство – ядро  $\text{Ker} x^* \subset X_1$  обладает свойством  $(W)$  (обозначение:  $\text{Ker} x^* \in (W)$ ):  $W_x(\text{Ker} x^*) = W_x(X_1)$ . Хорошо известно [2–6], если  $X_1^*$  – пространство, сопряженное к  $X_1$ , то элементы  $x^* \in X_1^*$ , линейные непрерывные функционалы на  $X_1$ .

Аналогично можно считать элементы  $x \in X_1$  линейными непрерывными функционалами на  $X_1^*$ , что позволяет считать вложенным (естественно)  $X_1$  в  $X_1^{**}$  – второе сопряженное к  $X_1$  пространство. Такой технический прием можно применить к замкнутым подпространствам  $Y \subset X_1$  и к ним сопряженным  $Y^*$ , которые в нашем случае являются замкнутыми подпространствами в  $X_1^*$ , сопряженном к  $X_1$ . Такой подход оправдывает часто определить норму в пространстве  $X_1$  с помощью следующего равенства (см., например, [2–6]):

$$\|x\| = \sup \{ |x^*(x)| : x^* \in B(X_1^*) \}, x \in X_1, \quad (1)$$

где  $B(X_1^*) = \{x^* \in X_1^* : \|x^*\| \leq 1\}$  – замкнутый единичный шар в  $X_1^*$ . Таким образом, под нормой  $\|\cdot\|$  в  $X_1$  можно понимать обычную норму и норму, определенную равенством (1). Если  $x \in X_1$  и  $y \in X_1^*$ , то будем писать, что  $x \perp y$  или  $y \perp x$ ,  $x(y) = y(x) = 0$ . В этом случае мы иногда применяем терминологию:  $x$  и  $y$  «ортогональны». Если  $Y^*$  – замкнутое подпространство в  $X_1^*$ , то

под аннулятором  $Y^{*\perp}$  в  $X_1$  понимается множество всех элементов из  $X_1$  таких, что каждый из них «ортогонален» каждому элементу  $y^* \in Y^*$ , т. е.

$$Y^{*\perp}(X_1) = \{x \in X_1 : x(y^*) = y^*(x) = 0 \quad \forall y^* \in Y^*\}. \quad (2)$$

Понятие ортогональности в гильбертовом пространстве определяется скалярным произведением: если  $H$ -гильбертово пространство и  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение, то  $x \perp y$  ( $x, y \in H$ ) означает, что  $(x, y) = 0$ . Если определяется «ортогональность» в общей форме, то элементы  $x$  и  $y$  должны принадлежать нормированным пространствам  $X$  и  $Y$  ( $x \in X, y \in Y$ ), находящимся в двойственности [6], т. е. в общем случае, когда рассматривается «ортогональность» двух элементов  $x$  и  $y$ , то один из элементов  $x$  и  $y$  мыслится как линейный непрерывный функционал, а другой элемент мыслится его аргументом:  $x(y) = y(x) = 0$ . Таким образом, понятие ортогональности в гильбертовом пространстве отличается от понятия «ортогональности» в общем случае. Это связано с тем, что гильбертово пространство  $H$  является самосопряженным:  $H = H^*$  – сопряженное к  $H$  пространство.

Пусть  $X_1$  – банахово пространство. Линейный оператор  $P: X_1 \rightarrow X_1$  с областью определения  $D(P) = X_1$  называется проектором, если  $P^2 = P$ . Если оператор  $P$  ограниченный, то проектор  $P$  называется непрерывным. Оператор  $Q = I - P$ , где  $I$  – тождественный оператор в  $X_1$  или единичный  $I: X_1 \rightarrow X_1$ , называется проектором [2–6], дополнительным к проектору  $P$ . Очевидно, имеют место равенства:  $PQ = QP = 0$  – нуль-оператор. Каждый проектор  $P$  в  $X_1$  порождает представление  $X_1$  в виде прямой суммы  $X_1 = PX_1 \oplus QX_1$ , где  $\text{im } P = P(X_1)$ ,  $Q(X_1) = \text{Ker } P = \{x \in X_1 : P(x) = 0\}$ . Напомним, что если  $M$  и  $N$  – подпространства в  $X_1$ , то алгебраическая сумма  $M + N = \{x + y : x \in M, y \in N\}$  при условии, что  $M \cap N = \{0\}$ , где  $\{0\}$  – множество, состоящее из нуля-элемента в  $X_1$ , называется прямой суммой и обозначается  $M \oplus N$ . Разложение пространства  $X_1$  в виде прямой суммы, т. е.  $X_1 = M \oplus N$ , определяет проектор  $P$  пространства  $X_1$  на подпространство  $M$  параллельно  $N$  ( $Q = I - P$  называется проектором пространства  $X_1$  на  $N$  параллельно  $M$ ). Прямая сумма  $X_1 = M \oplus N$  называется топологической прямой, если проектор  $P$  пространства  $X_1$  на  $M$  параллельно  $N$  является непрерывным (обозначение:  $X_1 = M \dot{+} N$ ). Ради удобства топологическую прямую сумму будем обозначать так же, как прямую сумму. Таким образом, прямые суммы у нас – топологические прямые суммы. Если  $X_1 = M \oplus N$  – прямая сумма (топологическая), то  $M(N)$  называется дополняемым подпространством в  $X_1$ . Если одно из слагаемых в прямой сумме  $X_1 = M \oplus N$  является аннулятором какого-нибудь подпространства из другого банахова пространства (или того же пространства  $X_1$ ), находящегося в двойственности с пространством  $X_1$  [6], то говорят, что другое прямое слагаемое в указанной прямой сумме есть супердополняемое подпространство  $X_1 = M \oplus N$ , а  $N$  – его супердополнение в  $X_1$ . Например, пусть  $Y^*$  – замкнутое подпространство в  $X_1^*$ , которое является сопряженным к некоторому замкнутому подпространству  $Y \subset X_1$  и выполняется равенство

$$X_1 = Y \oplus Y^{*\perp}(X_1), \quad (3)$$

где  $Y^{*\perp}(X_1)$  – аннулятор  $Y^*$ , сопряженное к  $Y$ , в пространстве  $X_1$ . В этом случае можно считать элементы  $x \in X_1$  линейными непрерывными функционалами на  $X_1^*$  и  $Y^* \subset X_1^*$  (по предположению, пространство  $X_1$  естественно вложено в  $X_1^{**}$ , второе сопряженное к  $X_1$  пространство, а каждое замкнутое подпространство  $Y \subset X_1$  естественно вложено в  $Y^{**}$ , второе сопряженное к  $Y \subset X_1$  подпространство в  $X_1^{**}$  (это новейшая идея, которая реальна в рассматриваемом нами классе банаховых пространств). Прямая сумма (3) содержит аннулятор  $Y^{*\perp}$ , а это по определению означает, что подпространство  $Y$  в этой сумме супердополняемо в  $X_1$ . Второе слагаемое в (3) –  $Y^{*\perp}(X_1)$  – супердополнение к  $Y$ . Из дополняемости подпространств  $Y \subset X_1$  не следует супердополняемость их. Так что введенное нами понятие супердополняе-

мости обобщает понятие ортогональной дополняемости в гильбертовых пространствах, путем обобщения понятия ортогональности для класса банаховых пространств, охватывающего гильбертовы, рефлексивные пространства, пространства Гельдера, обобщенные пространства Гельдера, некоторые пространства Никольского и Бесова [15] и другие.

Пространством Розенталя  $X_1$  (обозначение:  $X_1 \in (R)$ ) называется такое банахово пространство, которое не содержит подпространств, изоморфных  $l_1$ . Пространства  $X_1 \in (R)$  характеризуются теоремой Розенталя [14]: для того чтобы банахово пространство  $X_1$  было пространством Розенталя ( $X_1 \in (R)$ ), необходимо и достаточно, чтобы из каждой ограниченной последовательности в  $X_1$  можно было выделить слабую подпоследовательность Коши, необязательно сходящуюся в  $X_1$ . Многие известные банаховы пространства являются пространствами Розенталя. Сепарабельные пространства Розенталя изометрически изоморфны сепарабельным пространствам Розенталя  $X_1 \in E(X)$ , сопряженные к которым не имеют дефлекторов:  $X_1^* = Z^*$ , где  $Z^*$  – замыкание  $X^*$  в  $X_1^*$ . Одной из фундаментальных проблем С. Банаха была следующая проблема, которую пытались решить почти до конца 20-го века [8–13, 16]: пусть  $X$  – банахово пространство такое, что произвольное его подпространство  $Y$  является дополняемым (в обычном, широком смысле), т. е. существует проекция  $P: X \rightarrow Y$ . Изоморфно ли  $X$  гильбертову пространству  $H$ , т. е. существует ли обратимый линейный и непрерывный оператор  $T: X \rightarrow H$ ? Сначала эта проблема была положительно решена Ю Линденштраусом и Л. Цаффрири [16], а затем отрицательное решение проблемы С. Банаха было получено в [8–13]. Положительное решение в [16] устанавливало, что свойством гильбертового пространства дополняемости каждого замкнутого подпространства обладает только «одно» гильбертово пространство. К счастью, такое решение проблемы С. Банаха, как доказал автор этой статьи [8–13], оказалось некорректным. Таким образом, до конца 20-го века не нашлось автора, плодотворно для науки решившего проблему С. Банаха. Мы приведем некоторые результаты, полученные ранее автором данной статьи [8–13, 17–19], в более доступной форме и дающие обоснование решения указанной проблемы.

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $X_1 \in E(X)$ . Для того чтобы выполнялось равенство  $X_1^* = Z^*$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого собственного замкнутого подпространства  $Y \subset X_1$  и сопряженного к нему  $Y^*$  существовал ненулевой элемент  $x_0 \in X_1 \setminus Y$  такой, что

$$x_0(y^*) = 0 \quad \forall y^* \in Y^*. \quad (4)$$

**Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь.** Пусть  $X_1^* = Z^*$ . Тогда по теореме 9 в [9] сопряженное  $Y^*$  к любому замкнутому подпространству  $Y \subset X_1$  регулярно замкнуто в  $X_1^*$  и, следовательно, существует ненулевой элемент  $x_0 \in X_1 \setminus Y$  такой, что  $x_0(y^*) = 0 \quad \forall y^* \in Y^*$ , т. е. выполняется равенство (4).

**Д о с т а т о ч н о с т ь.** Пусть выполняется равенство (4) для сопряженного  $Y^*$  к любому замкнутому подпространству  $Y \subset X_1$ . Предположим, что существует дефлектор  $x^* \in X_1^* \setminus Z^*$ , т. е.  $Y = \text{Ker } x^* \in (W): W_x(Y) = W_x(X_1)$ . По условию доказываемого утверждения для  $Y = \text{Ker } x^*$  и сопряженного к нему  $Y^*$  существует ненулевой элемент  $x_0 \in X_1 \setminus Y$  такой, что выполняется равенство (4). Так как  $Y \subset X_1$ , то переходя к сопряженным пространствам, будем иметь включение:  $X_1^* \subset Y^*$ . Хорошо известно [11], что всегда  $Z^* \subset X_1^*$ . Тогда из предыдущего и последнего включений следует, что  $Z^* \subset Y^*$ . Отсюда следует, что в равенстве (4)  $x_0$  – нулевой элемент, а это противоречит условию доказываемого утверждения. Следовательно, предположение о существовании дефлектора не верно. Теорема 1 доказана.

**П р е д л о ж е н и е.** Пусть  $X_1 \in E(X)$  и  $X_1^* = Z^*$ . Кроме того,  $Y$ -замкнутое подпространство в  $X_1$ , сопряженное к которому  $Y^*$ . Для того чтобы ядро  $\text{Ker } y \subset Y^*$ , где  $y$  – ненулевой элемент из  $W_x(Y)$ , было тотально на  $Y$ , необходимо и достаточно, чтобы  $y \in W_x(Y) \setminus Y$  [17].