

УДК 51
ББК 21.1
Б46

Бен-Ари М.

Б46 Математические сюрпризы / пер. с англ. А. А. Слинкина. – М.: ДМК Пресс, 2023. – 216 с.: ил.

ISBN 978-5-93700-191-7

Эта книга опровергает расхожее представление о том, что к изучению математики следует подходить со всей строгостью и эмоции в этом деле неуместны. На этих страницах вы найдете сюрпризы, фокусы и неожиданные источники вдохновения в области математики. Среди того, что вас удивит и порадует, – обоснование возможности геометрического построения алгебраическими средствами, демонстрация математических принципов на примере оригами, необычное доказательство по индукции, новый взгляд на хорошо известный результат и малоизвестная, на первый взгляд, теорема, легшая в основу целой отрасли математики.

Издание предназначено тем, кто увлекается математикой и знает ее в объеме средней школы.

УДК 51
ББК 21.1

© Mordechai Ben-Ari, 2022. This book is an open access publication.

This book is licensed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons license and indicate if changes were made.

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-3-031-13565-1 (англ.)
ISBN 978-5-93700-191-7 (рус.)

© Mordechai Ben-Ari, 2022
© Перевод, оформление, издание,
ДМК Пресс, 2023

Содержание

От издательства	10
Вступительное слово	11
Предисловие	13
Глава 1. Складывающийся циркуль	18
1.1. Построение циркулем и линейкой	19
1.2. Фиксированный и складывающийся циркуль	19
1.3. Построение Евклида для копирования отрезка прямой.....	21
1.4. Некорректное построение копии отрезка.....	22
1.5. Не доверяйте рисункам.....	24
В чем сюрприз?	25
Источники	25
Глава 2. Трисекция угла	26
2.1. Приближенные трисекции.....	26
2.1.1. Первая приближенная трисекция	26
2.1.2. Вторая приближенная трисекция.....	29
2.2. Трисекция с помощью невсиса	31
2.3. Удвоение куба с помощью невсиса	32
2.4. Трисекция угла с помощью квадратрисы.....	33
2.5. Числа, допускающие построение.....	35
2.6. Числа, допускающие построение, как корни многочленов.....	37
2.7. Невозможность классических построений	39
В чем сюрприз?	41
Источники	41
Глава 3. Квадратура круга	42
3.1. Построение Кочански	43
3.2. Первое построение Рамануджана.....	44
3.3. Второе построение Рамануджана	47
3.4. Квадратура круга с помощью квадратрисы	50
В чем сюрприз?	51
Источники	51

Глава 4. Теорема о пяти красках	52
4.1. Плоские карты и планарные графы	52
4.2. Формула Эйлера	54
4.3. Непланарные графы	56
4.4. Степени вершин	57
4.5. Теорема о шести красках	58
4.6. Теорема о пяти красках.....	59
4.7. Некорректное доказательство Кемпе теоремы о четырех красках	61
В чем сюрприз?	62
Источники	62
Глава 5. Как организовать охрану музея	63
5.1. Раскрашивание триангулированных многоугольников	64
5.2. От раскраски многоугольников к охране музея	66
5.3. Любой многоугольник можно триангулировать	66
В чем сюрприз?	69
Источники	69
Глава 6. Индукция	70
6.1. Аксиома математической индукции	70
6.2. Числа Фибоначчи	72
6.3. Числа Ферма.....	75
6.4. 91-функция Маккарти	76
6.5. Задача Иосифа Флавия	77
В чем сюрприз?	80
Источники	80
Глава 7. Решение квадратных уравнений	81
7.1. Традиционные методы решения квадратных уравнений	81
7.2. Связь между корнями и коэффициентами.....	82
7.3. Примеры применения метода Ло	84
7.4. Вывод традиционной формулы.....	86
7.5. Геометрическое решение квадратных уравнений аль-Хорезми	86
7.6. Построение Кардано для решения кубических уравнений	88
7.7. Мнимые числа их не смущали.....	89
7.8. Метод Лилла и окружность Карлайла	90
7.9. Численное нахождение корней	93
В чем сюрприз?	94
Источники	94
Глава 8. Теория Рамсея	95
8.1. Тройки Шура	95
8.2. Пифагоровы тройки.....	97
8.3. Задача ван дер Вардена.....	98
8.4. Теорема Рамсея	99

8.5. Вероятностный метод	100
8.6. SAT-решатели.....	101
8.6.1. Логика высказываний и SAT-задача	102
8.6.2. Тройки Шура.....	102
8.6.3. Пифагоровы тройки	103
8.6.4. Краткий обзор алгоритма DPLL.....	104
8.7. Пифагоровы тройки в вавилонской математике	105
В чем сюрприз?	108
Источники	108

Глава 9. Задача Лэнгфорда

9.1. Задача Лэнгфорда как задача о покрытии	109
9.2. Для каких значений N задача Лэнгфорда разрешима?.....	111
9.3. Решение для $L(4)$	114
В чем сюрприз?	115
Источник	115

Глава 10. Аксиомы оригами

10.1. Аксиома 1	116
10.2. Аксиома 2	117
10.3. Аксиома 3	118
10.4. Аксиома 4	120
10.5. Аксиома 5	121
10.6. Аксиома 6	123
10.6.1. Вывод уравнения сгиба	125
10.6.2. Вывод уравнений отражения	128
10.6.3. Касательные к параболе	129
10.7. Аксиома 7	130
В чем сюрприз?	132
Источники	132

Глава 11. Фокус-покус

11.2. Описание метода Лилла.....	135
11.2.1. Метод Лилла как алгоритм.....	135
11.2.2. Отрицательные коэффициенты	136
11.2.3. Нулевые коэффициенты	137
11.2.4. Нецелые корни	137
11.2.5. Кубический корень из двух	138
11.3. Доказательство корректности метода Лилла.....	139
11.4. Складывание Белох.....	140
В чем сюрприз?	141
Источник	141

Глава 12. Геометрические построения с помощью оригами

12.1. Трисекция угла Абе	142
12.2. Трисекция угла Мартина	143

12.3. Удвоение куба Мессера.....	145
12.4. Удвоение куба Белох	147
12.5. Построение правильного девятиугольника.....	148
В чем сюрприз?	150
Источники	150

Глава 13. Циркуля достаточно 151

13.1. Что такое построение одним циркулем?.....	151
13.2. Отражение точки.....	152
13.3. Построение окружности заданного радиуса.....	153
13.4. Сложение и вычитание отрезков.....	154
13.5. Построение пропорционального отрезка	157
13.6. Построение точки пересечения двух прямых	158
13.7. Построение точек пересечения прямой и окружности	160
В чем сюрприз?	161
Источник	161

Глава 14. Линейки и одной окружности достаточно 162

14.1. Что такое построение одной линейкой?.....	162
14.2. Построение прямой, параллельной заданной.....	163
14.3. Построение перпендикуляра к заданной прямой	166
14.4. Копирование отрезка в заданном направлении	166
14.5. Построение пропорционального отрезка	167
14.6. Построение квадратного корня	168
14.7. Построение точек пересечения прямой и окружности	169
14.8. Построение точек пересечения двух окружностей.....	169
В чем сюрприз?	171
Источники	171

Глава 15. Конгруэнтны ли треугольники с одинаковыми площадью и периметром?..... 172

15.1. От треугольника к эллиптической кривой.....	173
15.2. Решение уравнения эллиптической кривой	175
15.3. Вывод треугольника из эллиптической кривой	177
В чем сюрприз?	178
Источники	178

Глава 16. Построение правильного семнадцатиугольника 179

16.1. Построение правильных многоугольников	180
16.2. Основная теорема алгебры.....	181
16.3. Корни из единицы.....	181
16.4. Доказательство Гаусса возможности построения правильного семнадцатиугольника	182
16.5. Вывод формулы Гаусса	186
16.6. Построение правильного семнадцатиугольника	187

16.7. Построение правильного пятиугольника	190
16.7.1. Тригонометрическое	191
16.7.2. Геометрическое	191
В чем сюрприз?	192
Источники	192

Приложение А. Теоремы из геометрии и тригонометрии 193

А.1. Теоремы о треугольнике	193
А.1.1. Вычисление площади треугольника	193
А.2. Тригонометрические тождества	196
А.2.1. Синус и косинус суммы и разности двух углов	196
А.2.2. Косинус тройного угла	198
А.2.3. Синус и косинус половинного угла	198
А.2.4. Теорема косинусов	199
А.2.5. Тангенс суммы двух углов	200
А.2.6. Тангенс половинного угла	201
А.2.7. Произведение трех тангенсов	201
А.2.8. Предел $\sin \alpha / \alpha$	202
А.3. Теоремы о свойствах биссектрисы	203
А.4. Теорема Птолемея	204
А.4.1. Трапеция, вписанная в окружность	204
А.4.2. Доказательство теоремы Птолемея	206
А.5. Теорема Чевы	207
А.6. Теорема Менелая	208
Источники	209

Литература 210

Предметный указатель 213